# Espaces vectoriels normés [1/3]

EL BAKKALI EL KADI Taha

College of Computing
UM6P

# Généralités

Dans tout ce cours $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

### Définition 1

Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, on appelle norme sur $E$ toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- **Homogénéité** : $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, on a
$$N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x).$$
- **Séparation** : $\forall x \in E$,
$$N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0.$$
- **Inégalité triangulaire** : $\forall(x, y) \in E^2$, on a
$$N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

**Définition 2**

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé**.

Dans la suite, si la notation de la norme de l'espace normé $E$ n'est pas précisée, on utilisera la notation $\| \cdot \|$ par défaut.

**Proposition 3**

Soient $x$ et $y$ deux vecteurs d'un evn E. Alors, on a :

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

# Espace préhilbertien et norme euclidienne

## Définition 4

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur $E$, toute application **sesquilinéaire**

$$\langle .,.\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

étant,

1. à symétrie hermitienne i.e. $\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$.
2. positive i.e. $\forall x \in E, \quad \langle x,x\rangle \geq 0$.
3. définie i.e. $\forall x \in E, \quad \langle x,x\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$.

**Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.**

# Espace préhilbertien

Soit $E$ un espace préhilbertien. L'application définie sur $E$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ par $x \longrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme appelée norme èuclidienne. On note $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$.

## Proposition 5

Soit $E$ un espace préhilbertien. Pour tous $x, y \in E$. Alors

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si $(x, y)$ est une famille liée.

## Proposition 6

La norme euclidienne est une norme.

**Exercice 7:**

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{K}^d$, on pose $(x|y) = \sum_{i=1}^{d} \overline{x_i} y_i$. Montrer que $(\mathbb{K}^d, (.|.))$ est un espace préhilbertien.
2. Pour tous $f, g \in C([a, b], \mathbb{K})$, on pose

$$(f|g) = \int_a^b \overline{f(t)} g(t)\, dt$$

Montrer que $(C([a, b], \mathbb{K}), (.|.))$ est un espace préhilbertien.

Exercice 8:

1. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{K}^d$,

$$\left| \sum_{i=1}^{d} \overline{x_i} y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^{d} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Montrer que, pour tous $f, g \in C([a,b], \mathbb{K})$,

$$\left| \int_a^b \overline{f(t)} g(t)\, dt \right| \leq \left( \int_a^b |f(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b |g(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

# Normes usuelles

# Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Si $x$ est un vecteur de $\mathbb{K}^n$ , $(x_1, \ldots, x_n)$ ses composantes, et l'on pose:

$$\|x\|_\infty = \max_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k| \,; \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}.$$

## Proposition 9

Les trois applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}^n$ :

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|,$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

Soit **$E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$**, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout vecteur $x \in E$ on note $x_k$ avec $k \in \{1, \dots, n\}$ les composantes de $x$ dans $\mathcal{B}$ et on définit les trois applications suivantes :

$$\|x\|_{\infty,\mathcal{B}} = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|, \quad \|x\|_{1,\mathcal{B}} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_{2,\mathcal{B}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}.$$

**Proposition 10**

Les applications $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}}$, $\|\cdot\|_{1,\mathcal{B}}$ et $\|\cdot\|_{2,\mathcal{B}}$ sont des normes sur $E$.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note :

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right),$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right),$$

**Proposition 11**

Les applications $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $(E, ||.||)$ un evn et $X$ un ensemble non vide. Notons $\mathcal{B}(X, E)$ l'espace vectoriel des applications bornées de $X$ dans $E$.

### Proposition 12

L'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(X,E) &\longrightarrow \mathrm{IR}_+ \\ f &\longmapsto \|f\|_\infty \end{aligned} \qquad \text{où} \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

est une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$, appelée norme infinie.

# Normes usuelles sur l'espace des fonctions continues sur un segment

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$. On note $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ , l'ensemble des fonctions continues du segment $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, on peut alors définir:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t},$$

Sur $\mathbb{K}[X]$, plusieurs normes classiques peuvent être considérées :

- **Normes définies à partir des coefficients**:
  Soit $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ ; On peut alors définir:

$$\|P\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|, \qquad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2}, \qquad \|P\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

- **Normes définies à partir des valeurs de la fonction polynomiale** :
  Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On peut alors définir:

$$\|P\|_1 = \int_a^b |P(t)|\,\mathrm{d}t, \qquad \|P\|_2 = \sqrt{\int_a^b |P(t)|^2\,\mathrm{d}t}, \qquad \|P\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |P(t)|.$$

# Norme usuelle sur un espace produit

## Proposition 13

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $p$ espaces vectoriels normés $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ sur $\mathbb{K}$. L'application :

$$\begin{aligned} \varphi : E_1 \times \cdots \times E_p &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto \max\left(N_1\left(x_1\right), \dots, N_p\left(x_p\right)\right) \end{aligned}$$

est une norme sur $E_1 \times \cdots \times E_p$, appelée norme produit.

# Distance associée à une norme

# Distance associée à une norme

## Définition 14

On appelle **distance** sur $E$ toute application

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y.$
2. $\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = d(y, x).$
3. $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

On appelle alors $(E, d)$ un **espace métrique**.

## Proposition 15

Si $(E, ||.||)$ est un espace vectoriel normé, alors l'application définie par $d(x, y) = ||x - y||$ définie une distance.

Dans tout ce chapitre, on considère que la distance associée à la norme de l'evn.

## Définition 16

Étant donné une partie $A \subset E$ non vide ainsi que $x \in E$, on appelle **distance de** $x$ **à** $A$, et on note $d(x, A)$, la quantité :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

## Proposition 17

Soit $A \subset E$ non vide, et $x, y \in E$. On a

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Remarque: Si $x \in A$, alors $d(x, A) = 0$. La reciproque est généralement fausse.

**Définition 18**

Soient $a \in E$ et $r > 0$.

- **Boule ouverte** de centre $a$ et de rayon $r$ :

$$B(a, r) = \{ x \in E \mid d(a, x) < r \}.$$

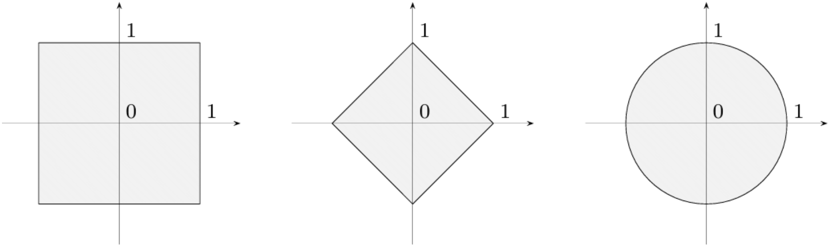
- **Boule fermée** de centre $a$ et de rayon $r$ :

$$Bf(a, r) = \{ x \in E \mid d(a, x) \leq r \}.$$

- **Sphère** de centre $a$ et de rayon $r$ :

$$S(a, r) = \{ x \in E \mid d(a, x) = r \}.$$

Voici le dessin de la boule fermé unité dans $\mathbb{R}^2$, muni successivement des normes infinie, un et deux:



# Parties convexes

**Définition 19**

Soient $a, b \in E$.
Le segment $[a, b]$ est la partie de $E$ définie par :

$$[a, b] = \{ ta + (1 - t)b \mid 0 \leq t \leq 1 \}.$$

**Définition 20**

Soient $a, b \in E$.
Soit $A$ une partie non vide de $E$. $A$ est dite partie convexe de $E$ si et seulement si :

$$\forall a, b \in A, \quad [a, b] \subset A$$

Exemple 21:

1. Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est convexe.
2. Une boule ouverte ou fermée est convexe.
3. Une intersection quelconque de convexes est convexe.
4. Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

# Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

**Définition 22**

Soit $(a_n)$ une suite d'éléments de $(E, ||.||)$ ainsi que $l \in E$. On dit que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers $l$ si la suite réelle $(||a_n - l||)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

**Proposition 23**

Soit $(a_n)$ une suite d'éléments de $(E, ||.||)$ ainsi que $l_1, l_2 \in E$. Si $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers $l_1$ et $l_2$, alors $l_1 = l_2$.

### Proposition 24

Si $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites qui convergent respectivement vers $a$ et $b$, et si $\lambda$ et $\mu$ sont deux scalaires, alors la suite de terme général $\lambda a_n + \mu b_n$ converge vers $\lambda a + \mu b$.

### Proposition 25

Si $(a_n)$ converge vers $a$, alors la suite de terme général $||a_n||$ converge vers $||a||$.

### Proposition 26

Toute suite convergente est bornée.

Exercice 27: Soient $(A_n)_n$ et $(B_n)_n$ deux suites à valeurs dans l'espace $M_p(\mathbb{K})$. Soient $A$ et $B \in M_p(\mathbb{K})$.
Montrer que :

- $\lim_{n\to+\infty} A_n = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \operatorname{tr}(A_n) = \operatorname{tr}(A)$
- $\lim_{n\to+\infty} A_n = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \det(A_n) = \det(A)$
- $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} A_n = A \\ \lim_{n\to+\infty} B_n = B \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}(A_nB_n) = AB$
- $\lim_{n\to+\infty} A_n = A \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty}(A_n^k) = A^k$
- Si $(A_n)$ une suite de matrices inversibles et $A$ une matrice inversible avec $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$. Alors $\lim_{n\to+\infty} A_n^{-1} = A^{-1}$

# Suite à valeurs dans un espace produit

Soient $(E_1, N_1), (E_2, N_2), \ldots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés. On peut munir $E_1 \times \ldots \times E_p$ par la norme:

$$||(x_1, \ldots, x_p|| = \max\left(N_1(x_1), .., N_p(x_p)\right).$$

**Proposition 28**

La suite $(a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(p)}) \in (E_1 \times \ldots \times E_p)^{\mathbb{N}}$ converge ssi pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, $(a_n^{(k)})$ converge. Dans ce cas, en notant $l_k$ la limite de $(a_n^k)$ pour tout $k$, on a :

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(p)}) = (l_1, \ldots, l_p).$$

Exercice 29: Considérons la suite $(X_n)_{n\geq 2}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall n \geq 2, \quad X_n = \left( ln(n) \sin\left(\frac{1}{ln(n)}\right), \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \right).$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 2}$ converge et préciser sa limite.

# Suites extraites, valeurs d'adhérence

### Proposition 30

Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.

### Définition 31

On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(a_n)$ tout élément de $E$ qui est limite d'une sous-suite de $(a_n)$.

### Proposition 32

Soit $(a_n)$ une suite à valeurs dans $E$. Un élément $x \in E$ est valeur d'adhérence de $(a_n)$ ssi:

$$\forall \epsilon > 0, \forall n_0 \geq 1, \exists n \geq n_0, ||a_n - x|| \leq \epsilon$$

Remarque: Une suite ayant une seule valeur d'adhérence n'est pas forcément convergente.

# Normes équivalentes

**Définition 33**

Soient $N_1$ et $N_2$ deux normes sur $E$. On dit que $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes si et seulement si :

$$\exists \alpha, \beta > 0 \quad \text{tels que} \quad \alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x), \quad \forall x \in E.$$

Remarque: On remarque que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\exists \alpha, \beta > 0 \quad \text{tels que} \quad \alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x), \quad \forall x \in E,$
2) $\exists \alpha, \beta > 0 \quad \text{tels que} \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x), \quad \forall x \in E.$

Exercice 34: Montrer que les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

# Partie ouverte

**Définition 35**

Soit $U$ une partie de $E$. On dit que $U$ ouvert de $E$ si:

$$\forall x \in E, \exists r > 0,\ B(x, r) \subset U.$$

Exemple 36:

- $\emptyset$ et $E$ sont des ouverts de $E$.
- Si $E$ n'est pas l'espace nul, Un singleton n'est pas ouvert de $E$.
- Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de la forme $]-\infty, b[$, $]a, b[$ ou $]a, +\infty[$, est ouvert dans $\mathbb{R}$, mais pas dans $\mathbb{C}$.

**Le caractère ouvert ou non d'un ensemble n'est pas une notion intrinsèque à cet ensemble, mais dépend de l'espace dans lequel on le considère.**

### Proposition 37

Toute boule ouverte est ouverte.

### Proposition 38

- La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est ouverte.
- L'intersection d'une famille **finie** d'ouverts est ouverte.

Remarque: Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas forcément un ouvert.

### Proposition 39

Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On munit l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ de la norme produit. Si $O_1, \dots, O_p$ sont ouverts dans $E_1, \dots, E_p$ respectivement, alors $O_1 \times \cdots \times O_p$ est ouvert dans $E_1 \times \cdots \times E_p$.

# Partie fermée

**Définition 40**

On dit qu'une partie de $E$ est fermée, si son complémentaire est un ouvert de $E$.

Exemple 41:

- $\emptyset$ et $E$ sont des fermés de $E$.
- Un singleton est un fermé de $E$.
- Tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de la forme $]-\infty, b]$, $[a, b]$ ou $[a, +\infty[$, est fermé dans $\mathbb{R}$.

**Proposition 42**

Une partie $A \subset E$ est fermée si, et seulement si, la limite de toute suite convergente d'éléments de $A$ appartient à $A$.

Exemple 43: $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé de $\mathbb{R}$.

# Partie fermée

### Proposition 44

Toute boule fermée est fermée.

### Proposition 45

- L'intersection d'une famille quelconque de fermés est fermée.
- La réunion d'une famille **finie** de fermés est fermée.

Remarque: Une intersection quelconque de fermés n'est pas forcément fermée.

### Proposition 46

Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On munit l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ de la norme produit. Si $F_1, \dots, F_p$ sont fermés dans $E_1, \dots, E_p$ respectivement, alors $F_1 \times \cdots \times F_p$ est fermé dans $E_1 \times \cdots \times E_p$.

Exercice 47: Soit $d \geq 2$. Montrer que $A$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$, et que $C_f$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$:

1. $A = \left\{ (x_1, x_2, .., x_d) \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; x_1^2 + 2x_2^2 + \ldots + dx_d^2 = 1 \right\}$.
2. $C_f$, la courbe de $f$, où $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 48: Montrer que la partie suivante est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ :

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y < f(x) \right\}, \quad \text{où } f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

# Voisinage

**Définition 49**

Soit $V$ une partie de $E$ et $a \in E$. On dit que $V$ est un *voisinage* de $a$ s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$.

Exemple 50: Tout ouvert contenant $a$ est un voisinage de $a$.

**Proposition 51**

Soit $a \in E$ ainsi que $V$ un voisinage de $a$. Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers $a$, alors il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \in V.$$

# Intérieur d'une partie

**Définition 52**

On dit qu'un point $x$ est intérieur à une partie $A \subset E$ si $A$ est un voisinage de $x$, càd s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.

L'ensemble des points intérieurs à $A$ est appelé intérieur de $A$ ; on le note $\mathring{A}$ ou $\text{Int}(A)$.

Exemple 53:

- $\text{Int}(A) \subset A$.
- Si $A$ est un ouvert, alors $\text{Int}(A) = A$.
- Si $A \subset B$, alors $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$.

.

**Proposition 54**

L'intérieur d'une partie $A$ est le plus grand ouvert qui soit inclus dans $A$.

# Adhérence d'une partie

**Définition 55**

On dit qu'un point $x$ est *adhérent* à une partie $A \subset E$ si pour tout $r > 0$, on a

$$B(x, r) \cap A \neq \varnothing.$$

L'ensemble des points adhérents à $A$ est appelé *adhérence* de $A$ ; on le note $\overline{A}$ ou $\mathrm{Adh}(A)$.

Exemple 56:

- S $A \subset \mathrm{Adh}(A)$.
- Si $F$ est un fermé, alors $F = \mathrm{Adh}(F)$ .
- $E \setminus \mathrm{Adh}(A) = \mathrm{Int}(E \setminus A)$.

.

**Proposition 57**

L'adhérence d'une partie $A$ est le plus petit fermé contenant $A$.

**Proposition 58**

Un point $x$ est adhérent à une partie $A$ si, et seulement s'il existe une suite $(a_n)$ de $A$ qui converge vers $x$.

Exercice 59: Soit $A$ une partie non vide d'un evn $E$. Montrer que:

$$d(x, A) = 0 \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Adh}(A).$$

# Densité

**Définition 60**

Soit $A$ une partie de $E$. Une partie $D$ de $A$ est dite *dense dans $A$* si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) l'adhérence de $D$ contient $A$ ;

(ii) pour tout $a \in A$ et pour tout $r > 0$, il existe $x \in D$ tel que $\|x - a\| \leq r$ ;

(iii) pour tout $a \in A$, il existe une suite $(d_n)$ de $D$ qui converge vers $a$.

Remarque: Une partie $A$ est dense dans $E$ si $\mathrm{Adh}(A) = E$.

Exercice 61: Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathbb{M}_n(K)$.

# Frontière

**Définition 62**

Soit $A$ une partie de $E$. La frontière de $A$, notée $\mathrm{Fr}(A)$, est l'ensemble
$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A),$$

Exemple 63:

- S $Fr(A) = \mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(E \setminus A)$ et $Fr(A)$ est un fermé.
- $A$ et $E \setminus A$ ont la même frontière.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Si $I$ est un intervalle d'extrémités $a$ et $b$, alors on a :

$$\mathrm{Int}(I) = ]a, b[, \qquad \mathrm{Adh}(I) = [a, b], \qquad \mathrm{Fr}(I) = \{a, b\}.$$

.

# Ouvert relatif & Fermé relatif

**Définition et proposition 64**

Soit $A$ une partie de $E$, et $O_A$ une partie de $A$. On dit que $O_A$ est **un ouvert relatif de $A$** si l'une de ces assertions suivantes est vérifiée.

- Pour tout $x \in O_A$, il existe $r > 0$ tel que
$$A \cap B(x, r) \subset O_A.$$
- Il existe un ouvert $O$ de $E$ tel que $O_A = A \cap O$.

**Définition et proposition 65**

Soit $A$ une partie de $E$, et $F_A$ une partie de $A$. On dit que $F_A$ est **un fermé relatif de $A$** si l'une de ces assertions suivantes est vérifiée.

- Il existe $O_A$ un ouvert relatif de $A$ tel que $F_A = A \setminus O_A$.
- Il existe un fermé $F$ de $E$ tel que $F_A = A \cap F$.

### Proposition 66

Soit $A$ une partie de $E$. Étant donné une partie $F$ de $A$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- $F$ est un fermé relatif de $A$ ;
- pour toute suite d'éléments de $F$ convergeant vers $\ell \in A$, on a $\ell \in F$.

# Limite d'une application

Soient $E$ et $F$ deux evn sur $\mathbb{K}$ et $A$ une partie de $E$.

**Définition 67**

Soit $f : A \to F$ une application, ainsi que $a$ un point adhérent à $A$ et $\ell \in F$. On dit que $f$ tend vers $\ell$ en $a$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ ||x - a|| \leq \eta \ \Rightarrow\ ||f(x) - \ell|| \leq \varepsilon.$$

**Proposition 68**

L'application $f$ tend vers $\ell$ en $a$ si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ tendant vers $a$, on a

$$f(u_n) \longrightarrow \ell.$$

**Proposition 69**

Si deux éléments $\ell_1$ et $\ell_2$ de $F$ vérifient $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

**Définition 70**

On dit que $f$ admet une limite en $a$ s'il existe $\ell \in F$ tel que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Cet unique élément $\ell$ s'appelle alors la limite de $f$ en $a$ et se note $\lim f$ ou $\lim_{x\to a} f(x)$.

**Définition 71**

On dit que $f$ est continue en $a \in A$ si $f$ admet une limite en $a$ qui vaut $f(a)$.

**Proposition 72**

Soit $f : A \to F$ une application. Supposons que $A$ ne soit pas bornée. On dit que $f$ tend vers $\ell \in F$ lorsque $x \to +\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A, ||x|| \geq M \implies ||f(x) - \ell|| \leq \varepsilon.$$

On note alors :

$$f(x) \xrightarrow[||x|| \to +\infty]{} \ell.$$

Pour une application définie sur une partie de $\mathbb{R}$, on introduit la notion de limite en $-\infty$ et $+\infty$.

Pour une partie $A \subset \mathbb{R}$, on étend la définition de point adhérent de la manière suivante : On dit que $-\infty$ (respectivement $+\infty$) est adhérent à $A$ s'il existe une suite d'éléments de $A$ tendant vers $-\infty$ (respectivement $+\infty$).

On remarque que:

- $-\infty$ est adhérent à $A$ si, et seulement si, $A$ n'est pas minorée.
- $+\infty$ est adhérent à $A$ si, et seulement si, $A$ n'est pas majorée.

**Définiton 73**

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to F$ une application et $\ell \in F$.

- Si $-\infty$ est adhérent à $A$, alors on dit que $f$ tend vers $\ell$ en $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leq M \implies ||f(x) - \ell|| \leq \varepsilon.$$

- Si $+\infty$ est adhérent à $A$, alors on dit que $f$ tend vers $\ell$ en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \geq M \implies ||f(x) - \ell|| \leq \varepsilon.$$

**Proposition 74**

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to F$ une application, et $\ell \in F$.

- Si $A$ est non minorée, alors $f$ tend vers $\ell$ en $-\infty$ si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ tendant vers $-\infty$, on a $f(u_n) \to \ell$.
- Si $A$ est non majorée, alors $f$ tend vers $\ell$ en $+\infty$ si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $A$ tendant vers $+\infty$, on a $f(u_n) \to \ell$.

# Application à valeurs dans un espace produit

# Application à valeurs dans un espace produit

On considère $p$ espaces vectoriels normés $E_1, E_2, \ldots, E_p$, et l'on munit l'espace $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ de la norme produit.

## Proposition 75

Si l'application $f : A \to E_1 \times \cdots \times E_p$ est à valeurs dans $E_1 \times \cdots \times E_p$, et si $f_1, \ldots, f_p$ désignent les applications composantes de $f$, alors $f$ tends vers

$$\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$$

en $a$, si, et seulement si, chacune des applications $f_k$ tend vers $\ell_k$ en $a$:

$$\forall k \in \{1, \ldots, p\}, \quad f_k(x) \to \ell_k \quad \text{quand } x \to a.$$

# Prolongement par continuité

**Définition 76**

Si $f$ possède une limite $\ell \in F$ en un point $a \in \overline{A} \setminus A$, alors l'application $\tilde{f} : A \cup \{a\} \longrightarrow F$ définie par:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A, \\ \ell, & \text{si } x = a, \end{cases}$$

est continue en $a$, et s'appelle le *prolongement de $f$ par continuité en $a$*.

Exercice 77: Soit $X \subset A$ dense dans $A$, et $f : X \longrightarrow F$ une application continue en tout point de $X$. On suppose que $f$ admet une limite finie en tout point de $A \setminus X$. Montrer que $f$ admet un prolongement $\tilde{f} : A \longrightarrow F$ continu en tout point de $A$.

# Opérations sur les limites

### Définition 78

Soient $f_1$ et $f_2$ deux applications de $A$ dans $F$, ainsi que $\lambda_1$ et $\lambda_2$ deux scalaires. Si $f_1 \underset{a}{\rightarrow} \ell_1 \in F$ et $f_2 \underset{a}{\rightarrow} \ell_2 \in F$, alors :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{a}{\rightarrow} \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2.$$

### Proposition 79

Soit $f : A \rightarrow F$ telle que $f \underset{a}{\rightarrow} \ell \in F$, et soit $\varphi : A \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $\varphi \underset{a}{\rightarrow} \lambda \in \mathbb{K}$. Alors la fonction

$$(\varphi f) : A \longrightarrow F, \quad x \longmapsto \varphi(x)\, f(x)$$

tend vers $\lambda \ell$ en $a$.

### Proposition 80

Soit $f : A \to \mathbb{K}$ une fonction ne s'annulant pas. Si $f \underset{a}{\to} \ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors:

$$\frac{1}{f} \underset{a}{\to} \frac{1}{\ell}.$$

### Proposition 81

Soit $E$, $F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, ainsi que $A \subset E$ et $B \subset F$. Soit $f : A \to F$ et $g : B \to G$ deux applications, avec $f(A) \subset B$.

Si $f \underset{a}{\to} b$ et $g \underset{b}{\to} \ell$, alors $g \circ f \underset{a}{\to} \ell$.

# Opérations sur les applications continues

## Proposition 82

- Une combinaison linéaire d'applications continues est continue.
- Le produit d'une application continue avec une application continue à valeurs dans $\mathbb{K}$ est continu.
- La composée de deux applications continues est continue.

Exemple 83:

- L'application $x \longmapsto \|x\|x$ est continue.
- Si $f$ est continue, alors l'application $x \longmapsto \|f(x)\|$ est continue.

## Proposition 84

Si $f : A \to \mathbb{K}$ est une application continue ne s'annulant pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue.

# Application lipschitzienne

**Definition 85**

Soit $k > 0$. On dit que l'application $f$ est *$k$-lipschitzienne* ou *lipschitzienne de rapport $k$* si :
$\forall (x, y) \in A^2, \quad ||f(x) - f(y)|| \leq k\,||x - y||.$

On dit que $f$ est *lipschitzienne* s'il existe $k > 0$ tel que $f$ soit $k$-lipschitzienne.

**Proposition 86**

Toute application lipschitzienne est continue.

Exemple 87:

- La norme est lipschitzienne.
- $A : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto d(x, A)$ est lipschitzienne.
- $E_1 \times \cdots \times E_n \;\longrightarrow\; E_k, \quad (x_1, \ldots, x_n) \;\longmapsto\; x_k$ est lipschitzienne.

.

# Images réciproques d'ouverts et de fermés par une application continue

### Proposition 89

Soit $f : A \to F$ une application. On a équivalence entre $f$ est continue, et l'une des proposition suivantes:

1. l'image réciproque par $f$ de tout fermé est fermé relatif à $A$.
2. l'image réciproque par $f$ de tout ouvert est ouvert relatif à $A$.

### Proposition 89

Étant donné $f : E \to F$ une application. On a équivalence entre $f$ continue et les propositions suivantes:

- l'image réciproque par $f$ de tout fermé est fermé.
- l'image réciproque par $f$ de tout ouvert est ouverte.

Exemple 87:

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y > 0\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
- $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$.